JUPITER

Jurnal Penelitian Fisika dan Terapannya (Jupiter), 1 (2), 2020
Available online at: http://jurnal.univpgri-palembang.ac.id/index.php/Jupiter
DOI: 10.31851/jupiter.v1i2.4994

Interpolasi Polinom Newton untuk Mengestimasi Fungsi Polinomial dari Suatu Benda Putar

Sagita Charolina Sihombing[1]*, Marmaini[2], Agus Dahlia[3]

[1] Program Studi Fisika, FMIPA Universitas PGRI Palembang, Palembang 30251, Indonesia

[2] Program Studi Biologi, FMIPA Universitas PGRI Palembang, Palembang 30251, Indonesia

[3] Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Islam Riau, Pekanbaru 28284, Indonesia

*e-mail: sagita.charolina@yahoo.com

Abstrak

Suatu benda putar dapat ditentukan volumenya jika kita mengetahui fungsi dari kurva benda putar tersebut. Akan tetapi dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai suatu objek benda putar yang belum dapat kita tentukan fungsinya. Dalam penelitian ini dibahas estimasi fungsi dari suatu benda putar dengan menggunakan interpolasi polinom newton. Diperoleh hasil volume dari benda putar dengan menggunakan pendekatan fungsi interpolasi polinomial newton mendekati volume aslinya.

Kata Kunci: Volume Benda Putar, Interpolasi Polinom Newton, Kurva

Newton Polynomial Interpolation for Estimating Polynomial Functions of a Rotating Object

Abstract

A volume can be determined if we know the function of the curve of the rotary object. But in everyday life we often encounter an object that we cannot yet determine its function. In this study, we discussed the estimation of the function of a rotating object using interpolation of newton polynomials. Obtained volume results from rotary objects using the interpolation polynomial approach to the original volume.

Keywords: Volume of Rotary Solid, Interpolation of Newton Polinom, Curve

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai benda putar yang bentuknya tidak beraturan. Benda tersebut sulit untuk kita definisikan fungsinya. Sehingga kita belum bisa menentukan volume dari benda tersebut. Jika suatu benda sudah diketahui fungsinya kita dapat menentukan volumenya dari bentuk partisi benda tersebut. Berdasarkan bentuk partisi tersebut, metode yang dapat digunakan untuk menentukan volume benda putar antara lain metode cakram, metode cincin dan metode kulit tabung.

Metode-metode di atas dapat digunakan jika fungsi dari bentuk objek benda putar diketahui. Sedangkan dalam kehidupan sehari-hari kita menemukan objek yang tidak diketahui fungsi objeknya. Beberapa peneliti di antaranya [1], dalam papernya menggunakan metode eliminasi gauss untuk menentukan fungsi dari suatu kurva atas benda putar. Selanjutnya, penelitian [2], [3], dan [7] membahas metode interpolasi untuk menentukan fungsi dari suatu kurva. Pencocokan kurva adalah sebuah metode yang mencocokkan titik data dengan sebuah kurva (*curve fitting*) fungsi. Penelitian [4] membahas data numerik dengan suatu kurva.

Pencocokan kurva dibedakan atas dua metode yaitu metode regresi dan interpolasi. Metode regresi merupakan metode pencocokan kurva dengan mengikuti kecenderungan (*trend*) titik data dan tidak perlu melalui semua titik. Sedangkan metode interpolasi dibuat dengan mengikuti setiap titik. Interpolasi dapat digunakan untuk memperkirakan suatu fungsi, yang mana fungsi tersebut tidak terdefinisi dengan suatu formula, tetapi didefinisikan hanya dengan data-data atau tabel, misalnya tabel dari hasil percobaan [8]. Bila fungsi cocokan yang digunakan berbentuk polinom, polinom tersebut dinamakan polinom interpolasi. Polinom interpolasi terbagi atas interpolasi Lagrange dan Newton. Penelitian [5] membahas perbandingan kedua interpolasi ini dan menemukan bahwa interpolasi Newton lebih baik dari Lagrange. Untuk itu, pada penelitian ini dibahas pendekatan fungsi dari benda putar yang tak beraturan dengan metode interpolasi Newton.

METODE PENELITIAN

Data diperoleh dengan mengukur objek dengan mengambil titik-titik objek. Selanjutnya dibentuk pendekatan persamaan untuk memprediksi persamaan fungsi objek yang tak beraturan. Langkah-langkahnya adalah:

1. Menentukan titik-titik benda putar yang akan diukur.
   Pada tahap ini dilakukan pencocokan suatu kurva dari titik-titik dalam suatu koordinat kartesius atas sekumpulan berhingga pasangan titik-titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ tanpa diketahui bentuk aturan fungsinya [3].

2. Menentukan bentuk persamaan umum polinomial interpolasi sesuai dengan jumlah titik-titik benda putar yang sudah diukur.
   Secara umum, $(n+1)$ titik data dapat dicocokkan dengan suatu polinomial berderajat n yang mempunyai bentuk:
   $$y = f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

3. Menentukan koefisien polinomial dengan menghitung beda terbagi hingga dari titik-titik benda putar
   Persamaan-persamaan yang digunakan untuk menghitung koefisien-koefisien yaitu
   - $a_0 = y_0,$
   - $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y[x_1,\ x_0]$
   - $a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{y[x_2, x_1] - y[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = y[x_2, x_1, x_0]$

   $\vdots$
   - $a_n = \frac{y[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1] - y[\ x_{n-1}, x_{n-2} \cdots, x_1, x_{01}]}{x_n - x_0} = y[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1,\ x_0]$

   Nilai fungsi berkurung siku dinamakan beda terbagi hingga dan didefinisikan sebagai

- $y[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$ (beda terbagi hingga pertama)
- $y[x_i, x_j, x_k] = \frac{y[x_i - x_j] - y[x_j - x_k]}{x_i - x_k}$ (beda terbagi hingga kedua)

⋮

- $y[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{y[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - y[x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$ (beda terbagi hingga ke-n)

4. Memasukkan koefisien ke dalam bentuk persaman polinomial
   Perhitungan koefisien-koefisien dalam polinomial berderajat tiga dapat diperoleh secara berturut-turut mulai dari baris kedua dalam Tabel 1

Tabel 1. Tabel Beda Terbagi Hingga

i	x_i	$y = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$y(x_0)$	$y[x_1, x_0]$	$y[x_2, x_1, x_0]$	$y[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$y(x_1)$	$y[x_2, x_1]$	$y[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$y(x_2)$	$y[x_3, x_2]$		
3	x_3	$y(x_3)$			

Pada tabel 1 di atas dilanjutkan sampai ke-n maka diperoleh interpolasi newton

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)y[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)y[x_2, x_1, x_0] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)y[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0]$$

5. Menggambarkan kurva yang dihasilkan
6. Menghitung volume benda putar dari fungsi yang diperoleh
   Selanjutnya untuk menentukan volume benda putar, dapat digunakan metode tabung, metode cakram dan metode cincin [6]. Metode cakram digunakan untuk menentukan volume benda putar atas suatu kurva yang diputar mengelilingi sumbu x. Untuk suatu kurva $f(x)$, volume benda putar dengan metode cakram diberikan sebagai berikut:

   $$V = \pi \int_0^a f(x)^2 dx$$

   Jika terdapat dua kurva yaitu $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ yang diputar mengelilingi sumbu x, maka volume benda putar dapat dihitung dengan metode cincin:

   $$V = \pi \int_0^a (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) dx$$

   Dan jika terdapat kurva diputar mengelilingi sumbu y, maka volume benda putar ditentukan sebagai berikut:

   $$V = 2\pi \int_0^a x f(x)^2 dx$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tabel 2 di bawah ini merupakan hasil dari pengukuran botol aqua galon air pada empat titik.

Tabel 2. Hasil Pengukuran Benda Putar

Koordinat x	2,30	7,00	11,00	12,00
Koordinat y	48,00	38,00	33,00	31,00

Selanjutnya dengan mengambil titik 2,30 sebagai titik awal, maka dapat dibentuk $x_0 = 2{,}30$ dan $f(x_0) = 48{,}00$. Titik-titik yang lainnya diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Pengukuran Benda Putar dalam Bentuk Koordinat

i	0	1	2	3
x_i	2,30	7,00	11,00	12,00
$f(x_i)$	48,00	38,00	33,00	31,00

Sehingga diperoleh

$$f(x_1, x_0) = \frac{38,00 - 48,00}{7 - 2,3} = -2,127$$

$$f(x_2, x_1) = \frac{33,00 - 38,00}{11 - 7} = -1,25$$

$$f(x_3, x_2) = \frac{31,00 - 33,00}{12 - 11} = -2$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{-1,25 + 2,127}{11 - 2,3} = 0,1008$$

$$f(x_3, x_2, x_1) = \frac{-2 + 1,25}{12 - 7} = -0,15$$

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{-0,15 - 0,1008}{12 - 2,3} = -0,0258$$

Nilai-nilai di atas selanjutnya dimasukkan ke dalam Tabel 4. di bawah ini:

Tabel 4. Matriks Perhitungan Beda Terbagi Hingga

No	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	**ST-1**	**ST-2**	**ST-3**
0	2,30	48,00	-2,127	0,1008	-0,0258
1	7,00	38,00	-1,25	-0,15	
2	11,00	33,00	-2		
3	12,00	31,00			

Diperoleh,

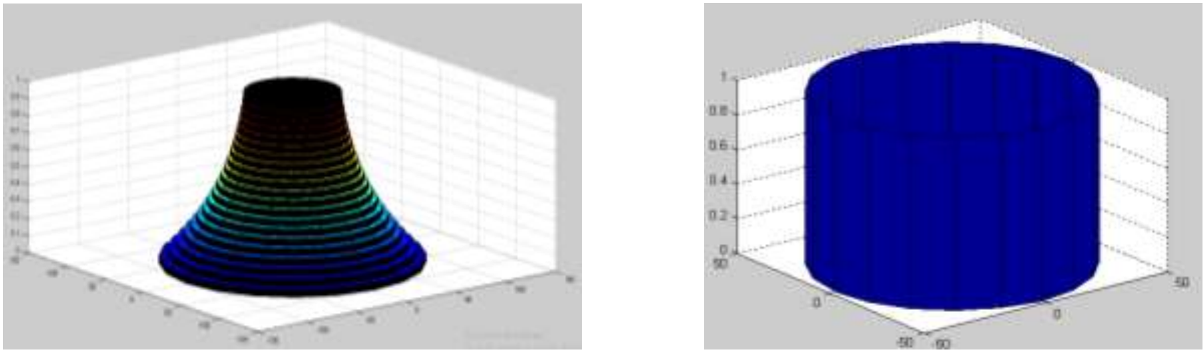
$$f_3(x) = 48 - 2,127(x - 2,3) + 0,1008(x - 2,3)(x - 7) - 0,0258(x - 2,3)(x - 7)(x - 11)$$

$$= -0,0258x^3 + 0,6245x^2 - 6,118x + 57,53$$

Sehingga bagian tidak rata dari botol aqua adalah berupa fungsi yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = -0,0258x^3 + 0,6245x^2 - 6,118x + 57,53$$

Jika digambarkan pada matlab diperoleh sebagai berikut:



(a) **(b)**

Gambar 1. (a) Bagian Botol Aqua yang Berbentuk Kurva dan (b) Berbentuk Tabung

Dari gambar 1 diketahui bentuk kurva yang dihasilkan menyerupai bentuk galon aqua. Sehingga diperoleh interpolasi polinomial dapat digunakan untuk mengaproksimasi bentuk objek yang akan dihitung volumenya.

Selanjutnya fungsi yang didefinisikan pada (3.1) dianggap sebagai y_2 dan $y_1 = a_0$.

Hasil dari integral bagian tak beraturan sebagai berikut:

$y_1 = 48$
$y_2 = -0{,}0258x^3 + 0{,}6245x^2 - 6{,}118x + 57{,}53$
$y_1 - y_2 = 0$
$0{,}0258x^3 - 0{,}6245x^2 + 6{,}118x - 9{,}53 = 0$

Sehingga untuk volume diperoleh sebagai berikut:

$\Delta V \approx 2\pi x(y_1 - y_2)\Delta x$

$$V \approx 2\pi \int_0^{12} x(\,0{,}0258x^3 - 0{,}6245x^2 + 6{,}118x - 9{,}53)dx$$

$$\approx 2\pi \int_0^{12} (\,0{,}0258x^4 - 0{,}6245x^3 + 6{,}118x^2 - 9{,}53x)dx$$

$$\approx 2\pi \left[\left(\frac{1}{5}0{,}0258x^5 - \frac{1}{4}0{,}6245x^4 + \frac{1}{3}6{,}118x^3 - \frac{1}{2}9{,}53x^2\right)\Big|_0^{12}\right]$$

$$\approx 2 * 3{,}14 * 884{,}373$$

$$\approx 5.553{,}863\ cm^3$$

Hasil dari integral bagian yang beraturan sebagai berikut:

Berbentuk tabung dengan jari-jari = 12 cm dan tinggi = 31 cm.

Volume tabung $= \pi r^2 t$
$= \frac{22}{7}(12)^2(31)$
$= 14.017\ cm^3$

Sehingga, aproksimasi volume dari 1 botol aqua

$= (5.553{,}863\ + 14.017)cm^3 = 19.570\ cm^3 = 19{,}57\ dm^3$

Volume ini tidak jauh berbeda dengan volume sebenarnya dari satu botol gallon aqua.

KESIMPULAN

Dari pembahasan diketahui bahwa metode interpolasi dapat digunakan untuk memprediksi fungsi dari suatu benda putar yang tidak beraturan. Volume yang dihasilkan dengan metode interpolasi untuk memprediksi fungsi mendekati volume yang sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Azmi. U, Yuliastuti.R, and Oktafianto. K, 2016 “Pendekatan Fungsi Polynomial dari Benda Putar dengan Metode Eliminasi Gauss Jordan”, Jurnal Limits, Vol. 13, No. 2, pp 11-20,

Das, B and Chakrabarty, D. 2016., “Newton’s Forward Interpolation: Representation of Numerical Data by A Polynomial Curve”, International Journal of Statistics and Applied Mathematics, 1(2), pp 36-41

Ripa, N. A., 2010, “Analysis of Newton’s Forward Interpolation Formula”, International Journal of Computer Science & Emerging Technologies, 12(1):4

Das, B and Chakrabarty, D, 2018, “Numerical Data on A Pair of Variables: Representation by Logistic Curve”, International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology, 5(6), pp 6113-6119.

Anton, H. and Rorres, C., “Comparison of Lagrange’s and Newton’s interpolating polynomials”, Journal of Experimental Sciences, 3(1), pp 01-04, 2012

Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S. 2015, "Calculus Ninth Edition" New Jersey at Upper Saddle River: Prentice Hall

Kuzevičová1, Ž., Gergeľová, M., Kuzevič, Š. and Palková, J. 2014. "Spatial Interpolation and Calculation of The Volume an Irregular Solid", International Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 4, No. 8, pp 14-21.

Munir, R. "Interpolasi Polinom", Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I: Metode Numerik/Teknik Informatika ITB