ISBN 978-602-50167-0-7

Prosiding SNMPM 2017

FENOMENA NON-LINIER DAN PEMBELAJARAN PEMODELAN MATEMATIKA

SNMPM 2017

Prosiding

FENOMENA NON-LINIER DAN PEMBELAJARAN PEMODELAN MATEMATIKA

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

TUDelft

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
PALEMBANG, 21 AGUSTUS 2017

“FENOMENA NON-LINIER DAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA**”**

PROSIDING
Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika

Ketua Pelaksana : Dr. Darmawijoyo, M.Si.
Penulis : Pemakalah Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
Editor : Dr. Darmawijoyo, M.Si., Dra. Nyimas Aisyah, M.Pd., Ph.D., Ernalida, S.Pd., M.Hum.
Reviewer :
1. Prof. Dr. Julan Hernadi, M.Si. (Universitas Muhammadiyah Ponorogo)
2. Prof. Dr. Siti Maghfirotun Amin, M.Pd. (Universitas Negeri Surabaya)
3. Prof. Dr. Zulkardi, M.I.Komp., M.Sc. (Universitas Sriwijaya)

Layout : Noerfikri Group
Desain Cover : Jihan Rihana

Hak Penerbitan pada Ikatan Alumni Pendidikan Matematika Universitas Sriwijaya bekerjasama dengan Universitas Sriwijaya

Dicetak oleh:
Noer Fikri Offset
Jl. KH. Mayor Mahidin No. 142
30126 Telp/Fax : (0711) 366625
Palembang - Indonesia
E-mail : noerfikri@gmail.com

Cetakan I : Agustus 2017

ISBN : 978-602-50167-0-7

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kami panjatkan kepada Allah SWT atas Karunia-Nya Buku Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Mateatika yang diselenggarakan pada tanggal 21-22 Agustus 2017 di Palembang dapat diterbitkan. Seminar Nasional ini merupakan salah satu agenda wajib pada program studi pendidikan matematika.

Kegiatan ini bertema “Fenomena Non-Linier dan Pembelajaran Matematika”. Seminar ini bertujuan untuk mendidik siswa master pada tingkat tinggi di bidang Matematika Terapan dan Fenomena Nonlinier. Selain itu, perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta kompleksitas permasalahan dalam dunia pendidikan terutama pendidikan matematika menuntut semua komponen untuk secara terus-menerus dan berkesinambungan melakukan penelitian dan terobosan-terobosan yang inovatif pada pembelajaran matematika.

Artikel dalampProsiding ini merupakan karya ilmiah yang telah disampaikan oleh *keynote speaker* dan pemakalah-pemakalah pendamping. Seminar nasional dan prosiding ini dapat terselesaikan dengan baik atas bantuan dari berbagai pihak kepada rektor Universitas Sriwijaya, Prof. Dr. Ir. H. Anis Saggaff, MSCE; Pemerintah Provinsi Sumsel; Kepala Dinas Pendidikan Sumatera Selatan atas dukungannya dalam kegiatan ini. Ucapan terimakasih juga kami sampaikan kepada Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sriwijaya, Prof. Sofendi, M.A., Ph.D., atas kepercayaan dan dukungan yang diberikan.

Ucapan terimakasih juga kami haturkan kepada para peserta baik dari Provinsi Sumatera Selatan, Provinsi lainnya dan dari berbagai daerah-daerah yang tersebar di seluruh Indonesia yang telah berkenan hadir untuk mengikuti kegiatan seminar nasional pendidikan ini.

Kepada segenap anggota panitia pelaksana, kami juga mengucapkan terimakasih dan meberikan reward setinggi-tingginya atas kerjasama dan pengorbanan yang telah diberikan selama pelaksanaan kegiatan ini berjalan dengan lancar dan dapat terlaksana ditengah kesibukan masing-masing.

Semoga Prosiding ini dapat bermanfaat serta menambah khasanah baik untuk para akademisi maupun pendidik di bidang matematika dan pendidikan matematika.

Palembang, 21 Agustus 2017
Panitia Seminar Nasional

SYARAT-SYARAT PEMETAAN DI RUANG METRIK PARSIAL AGAR MEMILIKI TITIK TETAP

Sagita Charolina Sihombing
Fakultas MIPA
Universitas PGRI Palembang
Palembang, Indonesia
Sagita.Charolina@yahoo.com

Ety Septiati
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas PGRI Palembang
Palembang, Indonesia
etyseptiati@yahoo.com

Abstrak—Ruang metrik parsial tengah menjadi topik yang menarik perhatian banyak ahli dewasa ini. Matthews (1992) *dalam* Bukatin, *et al* (2009) memperkenalkan ruang metrik parsial (X,p) sebagai pengembangan dari sebuah ruang metrik (X,d). Pengembangan ini didasari oleh permasalahan yang ditemukan dalam ilmu komputer dimana dua barisan tak hingga yang sama belum tentu memiliki jarak nol. Hal ini berbeda dengan sifat ruang metrik yang mensyaratkan jarak untuk dua barisan yang sama adalah nol. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji syarat cukup pemetaan di Ruang Metrik Parsial (X,p) agar memiliki titik tetap.

Kata Kunci—Ruang Metrik Parsial; Titik Tetap; Pemetaan Kontraktif

I. PENDAHULUAN

Titik tetap merupakan topik yang terus berkembang sejak puluhan tahun yang lalu.Hal ini karena aplikasi teori titik tetap banyak ditemukan dalam berbagai bidang seperti matematika, biologi, kimia dan ekonomi. Penggunaan teorema titik tetap pada bidang matematika diantaranya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear aljabar dan untuk menentukan solusi khusus persamaan diferensial. Titik $x \in X$ pada suatu ruang metrik (X,d) disebut titik tetap untuk suatu pemetaan *single valued* $T: X \to X$ jika $T(x) = x$. Sebagai contoh jika pemetaan $T: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ didefinisikan dengan $T(x) = x^2$, maka 0 dan 1 adalah titik tetap dari T karena $T(0) = 0$ dan $T(1) = 1$. Tidak semua pemetaan memiliki titik tetap, sebagai contoh jika pemetaan $T: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ didefinisikan dengan $T(x) = x + 1$, maka T tidak memiliki titik tetap.

Matthews (1992) dalam Bukatin, *et al* (2009) memperkenalkan **ruang metrik parsial** sebagai pengembangan dari sebuah ruang metrik. Pengembangan ini didasari oleh permasalahan yang ditemukan dalam ilmu komputer dimana dua barisan tak hingga yang sama belum tentu memiliki jarak nol. Program komputer tidak dapat memproses barisan tak hingga $x = (x_0, x_1, \dots)$ dalam waktu yang terbatas. Oleh karena itu, barisan x dibentuk dalam masing-masing bagian, yakni $(x), (x_0), (x_0, x_1)$, (x_0, x_1, x_2) dan seterusnya. Setelah setiap nilai x_k diproses maka dibentuk barisan berhingga $(x_0, \cdots, x_k)$ sebagai perwakilan barisan tak hingga yang telah dibentuk sebelumnya. Akan tetapi, jarak dari barisan berhingga x dan y yang mewakili barisan tak hingga tersebut adalah $(x,y) = 2^{-k}$, dengan $k < \infty$ sehingga $x_i = y_i$, untuk setiap $i < k$. Jadi, dua barisan tak hingga yang sama belum tentu memiliki jarak nol, sebab suku-suku barisan bisa sama jika terdefinisi. Hal ini berbeda dengan sifat ruang metrik yang mensyaratkan jarak untuk dua barisan yang sama adalah nol. Permasalahan tersebut melatarbelakangi pengembangan konsep metrik, dengan menambahkan sifat jarak suatu titik dengan dirinya sendiri tidak harus bernilai nol, yang kemudian lebih dikenal dengan metrik parsial. Dari uraian tersebut di atas menarik untuk dikaji tentang syarat-syarat pemetaan di ruang metrik parsial agar memiliki titik tetap. Sebelum dibahas hasil penelitian ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang akan mendukung pembahasan ini.

Definisi 1.1 Misalkan X adalah sebuah himpunan yang tak kosong. Suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$

Himpunan X bersama dengan metrik d disebut **ruang metrik** dan ditulis (X, d). [1]

Definisi 1.2 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik. Suatu barisan dari titik-titik di X adalah suatu fungsi $f: \mathbb{N} \to X$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n \in X$. Suku-suku x_n di X merupakan barisan titik di X dan dinotasikan dengan $\{x_n\}$. [1]

Teorema 1.3 Setiap barisan yang konvergen dalam ruang metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy. [1]

Secara umum, sifat sebaliknya tidak berlaku; setiap barisan Cauchy belum tentu konvergen.

Contoh 1.1
Himpunan $X = (0,1]$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$ dan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ di dalam ruang metrik (X, d). Barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy tapi tidak konvergen di X.

Definisi 1.4 Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di dalam X adalah konvergen. [1].

Proposisi 1.5 Misalkan (X, d) adalah suatu **ruang metrik lengkap** dan $S \subseteq X$. Maka:

i. Jika S himpunan bagian tertutup di X, maka (S, d) adalah subruang metrik lengkap dari X.
ii. Jika (S, d) adalah subruang metrik lengkap, maka S adalah tertutup di X.

[1]

Teorema 1.6 Suatu pemetaan $T: X \to Y$ dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) adalah kontinu di titik $x_0 \in X$ jika dan hanya jika

$$x_n \to x_0 \text{ maka } T(x_n) \to T(x_0) \tag{1}$$

[7]

Definisi 1.7 Diberikan ruang metrik (X, d). Suatu titik $x \in X$ disebut **titik tetap** dari pemetaan $T: X \to X$ jika

$$T(x) = x \tag{2}$$

[1]

Contoh 1.2
Fungsi $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $T(x) = x^2$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka T mempunyai dua titik tetap yaitu 0 dan 1.

Definisi 1.8 Diberikan ruang metrik (X, d). Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan bersifat **kontraktif** pada X jika terdapat bilangan riil $k \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq k d(x,y) \tag{3}$$

untuk setiap $x, y \in X$. [1]

Lemma 1.9 Suatu pemetaan kontraktif T di suatu ruang metrik (X, d) adalah **pemetaan kontinu**. [1]

Bukti.
Misalkan $x \in X$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ sehingga untuk setiap $d(x,y) < \delta$ berlaku:

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x,y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Karena x sebarang anggota di X, maka pemetaan T kontinu di X. ∎

Teorema 1.10 Misalkan (X, d) adalah sebuah **ruang metrik lengkap** dan misalkan $T: X \to X$ adalah sebuah pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap. [1]

Definisi 1.11 Misalkan (X, d) adalah suatu ruang metrik dan T adalah suatu pemetaan pada X. Pemetaan T adalah suatu pemetaan tipe Kannan jika terdapat $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ sedemikian sehingga

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha\big[d\big(x, T(x)\big) + d\big(y, T(y)\big)\big]$$

untuk semua $x, y \in X$. [1]

Di bawah ini diberikan contoh aplikasi titik tetap untuk menyelesaikan persoalan diferensial.
Misalkan persamaan diferensial $y' = y - 1$ dengan nilai awal $y(0) = 2$. Akan diselesaikan dengan metode iterasi titik tetap dengan $x_0 = 0$ dan $y_0(x_0) = 2$, sehingga diperoleh:

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$$

dengan $f\big(t, y_n(t)\big) = y_n(t) - 1$.
Diperoleh:

$$y_1(t) = 2 + \int_0^x (2-1)dt = 2 + \int_0^x 1dt = 2 + x$$

$$y_2(t) = 2 + \int_0^x (2 + x - 1)dt$$

$$= 2 + \int_0^x (1+x)dt = 2 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(t) = 2 + \int_0^x (2 + x - 1)dt$$

$$= 2 + \int_0^x (1+x)dt = 2 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_4(t) = 2 + \int_0^x \left(2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 - 1\right)dt$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3\right)dt$$

$$= 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + + \frac{1}{2.3}x^3 + + \frac{1}{2.3.4}x^4$$

Barisan iterasi di atas akan konvergen ke $1 + e^x$.

II. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Pembahasan pada penelitian dilakukan dengan terlebih dahulu mempelajari konsep ruang metrik dan sifat-sifatnya. Selanjutnya dipelajari sifat pemetaan kontraktif untuk pemetaan pada ruang metrik. Selanjutnya, konsep suatu ruang metrik dikembangkan ke dalam konsep ruang metrik parsial. Akan dibahas sifat-sifat ruang metrik parsial dan kelengkapan ruang metrik parsial.

Mengacu pada konsep pemetaan di ruang metrik, akan dipelajari sifat kontraktif pada pemetaan di ruang metrik parsial. Akan dibahas eksistensi titik tetap pada pemetaan di ruang metrik parsial dengan sifat pemetaan kontraktif. Jadi, akan dikaji syarat cukup agar suatu pemetaan di ruang metrik parsial mempunyai titik tetap.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat-sifat Ruang Metrik Parsial

Berikut ini akan dijabarkan sifat-sifat ruang metrik parsial.

Definisi 3.1.1 Misalkan X adalah sebuah himpunan yang tak kosong. Suatu fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ disebut sebagai metrik parsial pada X jika untuk sebarang $x, y, z \in X$, kondisi berikut terpenuhi:

(p1). $p(x,x) \leq p(x,y)$

(p2). $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$

(p3). $p(x,y) = p(y,x)$

(p4). $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

Himpunan X bersama dengan metrik parsial p disebut **ruang metrik parsial** dan ditulis (X,p). [3]

Contoh 3.1.1

$\mathbb{R}^+$: Himpunan bilangan riil positif.

Fungsi $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan oleh $p(x,y) = max\{x,y\}$ adalah metrik pada $\mathbb{R}^+$, sehingga $(\mathbb{R}^+, p)$ adalah ruang metrik parsial.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $p(x,x) \leq p(x,y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.
   Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$, maka:
   $$p(x,x) = max\{x,x\} \leq max\{x,y\} = p(x,y)$$
   Jadi, $p(x,x) \leq p(x,y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. Akan ditunjukkan jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ maka $x = y$.
   Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$,
   $$p(x,x) = p(x,y) = max\{x,x\} = x \qquad (4)$$
   $$p(y,y) = p(x,y) = max\{y,y\} = y \qquad (5)$$
   Dari (4) dan (5) didapat bahwa $x = y$
3. Akan ditunjukkan $p(x,y) = p(y,x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$
   Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$, maka:
   $p(x,y) = max\{x,y\} = max\{y,x\} = p(y,x)$
   Jadi, $p(x,y) = p(y,x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$

4. Akan ditunjukkan $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^+$
   Ambil $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, maka:
   $$\begin{aligned} p(x,y) + p(z,z) &= max\{x,y\} + max\{z,z\} \\ &\leq max\{x,z\} + max\{y,z\} \\ &\leq max\{x,z\} + max\{z,y\} \\ &\leq p(x,z) + p(z,y) \end{aligned}$$
   Sehingga dapat ditulis:
   $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$
   Jadi, $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

Dari 1, 2, 3, dan 4 terbukti bahwa $(\mathbb{R}^+, p)$ adalah ruang metrik parsial. ■

Definisi 3.1.2 Misalkan (X,p) adalah suatu ruang metrik parsial.

(i) Suatu barisan $\{x_n\}$ pada (X,p) konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$.

(ii) Suatu barisan $\{x_n\}$ pada (X,p) disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada (dan berhingga)

(iii) Suatu ruang metrik parsial dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X konvergen, terhadap τ,pada suatu titik $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = p(x,x)$. Setiap himpunan bagian tertutup dari suatu ruang metrik parsial lengkap adalah lengkap.

(iv) Setiap pemetaan $f: X \to X$disebut kontinu pada $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f\left(B_p(x_0, \delta)\right) \subset B_p(f(x_0), \varepsilon)$.

(v) Suatu barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik parsial (X,p) konvergen ke suatu titik $x \in X$, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $x \in B_p(x, \varepsilon)$, terdapat $n_0 \geq 1$ sedemikian sehingga, $x_n \in B_p(x, \varepsilon)$ untuk sebarang $n \geq n_0$.

(U. Kadak, F. Basar and H. Efe, 2013)

H.P. Masiha et al, 2013, pada jurnalnya mengatakan bahwa suatu ruang metrik parsial adalah perluasan dari suatu ruang metrik. Berikut ini diberikan Lemma yang menjelaskan hubungan antara ruang metrik (X, p^s) dengan ruang metrik parsial (X,p).

Lemma 3.1.3 Misalkan (X,p) adalah suatu ruang metrik parsial, dan fungsi $p^s: X \times X \to [0,\infty)$ didefinisikan oleh

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y), \quad \forall x,y \in X$$

maka p^s adalah sebuah metrik. [4]

Bukti:

(i) Jelas, bahwa $\forall x,y \in X$ maka $d(x,y) \geq 0$.

(ii) Dari (p2) didapat

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow p(x,x) = p(y,y) = p(x,y) \\ &\Leftrightarrow p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &\Leftrightarrow p^s(x,y) = 2p(x,y) - 2p(x,y) \\ &\Leftrightarrow p^s(x,y) = 0 \end{aligned}$$

(iii) Jelas, bahwa untuk semua $x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) Untuk semua $x,y,z \in X$ dan dari (p4), didapat

$$\begin{aligned} p^s(x,z) &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) \\ &\leq 2\big(p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\big) - p(x,x) - p(z,z) \\ &= 2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y) - p(x,x) - p(z,z) \\ &= 2p(x,y) + 2p(y,z) - p(y,y) - p(y,y) - p(x,x) - p(z,z) \\ &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) + 2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z) \\ &= p^s(x,y) + p^s(y,z) \end{aligned}$$

Dari keempat bukti di atas didapat bahwa d adalah sebuah metrik.

Lemma berikut ini menjelaskan hubungan barisan di ruang metrik (X,p^s) dengan ruang metrik parsial (X,p).

Lemma 3.1.4 Misalkan (X,p) adalah sebuah ruang metrik parsial.

a. $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X,p) jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan Cauchy di (X,p^s).

b. (X,p) adalah lengkap jika dan hanya jika (X,p^s) adalah lengkap.

[4]

Contoh 3.1.2

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan Riil dan fungsi jarak $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diberikan sebagai berikut:

$$p(x,y) = \frac{1}{2}\{|x-y| + |x| + |y|\}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Maka p adalah metrik parsial pada $\mathbb{R}$.

Lemma 3.1.5 Diberikan $X = [0,\infty)$ dan metrik parsial $p: X \times X \to [0,\infty)$ didefinisikan dengan $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk semua $x,y \geq 0$. Misalkan $T: X \to X$ adalah suatu fungsi tak menurun. Jika T kontinu terhadap metrik standar $d(x,y) = |x-y|$ untuk semua $x,y \geq 0$, maka T adalah kontinu terhadap metrik parsial p.

[3]

3.2 Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini dibahas tentang pemetaan pada Ruang Metrik Parsial. Pada penelitiannya, Matthew telah membuktikan teorema pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial di bawah ini:

Teorema 3.2.1 Misalkan (X,p) adalah ruang metrik parsial lengkap dan diberikan suatu pemetaan $T: X \to X$. Jika $\alpha \in [0,1)$ dan $x,y \in X$,

$$p(Tx,Ty) \leq \alpha p(x,y) \qquad (6)$$

Maka, T mempunyai titik tetap tunggal.

[5]

Selanjutnya, H.P. Masiha et al, **2013** menjelaskan pemetaan kontraktif lemah (*weakly contractive*) pada ruang metrik parsial sebagai berikut.

Definisi 3.2.2. Misalkan $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ memenuhi

I. $\phi(0) = 0$ dan $\phi(t) > 0$ untuk setiap $t > 0$

II. ϕ adalah semi kontinu menurun dari kanan yaitu untuk sebarang barisan tidak menaik tidak negatif $\{r_n\}$, $\lim\inf_{n\to\infty} \phi(r_n) \geq \phi(r)$, menghasilkan $\lim_{n\to\infty} r_n \geq r$

III. Untuk sebarang barisan $\{r_n\}$ dengan $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, terdapat $a \in (0,1)$ dan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\phi(r_n) \geq a r_n$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Didefinisikan $\Phi = \{\phi$: ϕ memenuhi (i)-(iii) kondisi diatas$\}$.

Teorema 3.2.3 Misalkan $(X,\leq)$ adalah himpunan terurut parsial dan andaikan terdapat suatu metrik parsial p pada X sedemikian sehingga (X,p) adalah suatu ruang metrik parsial lengkap. Andaikan $T: X \to X$ adalah pemetaan kontinu dan tak menurun sedemikian sehingga

$$p(Tx,Ty) \leq p(x,y) - \phi\big(p(x,y)\big) \qquad (7)$$

Untuk semua $x,y \in X$, dimana $\phi \in \Phi$.

Jika terdapat suatu bilangan $x_0 \in X$ dengan $x_0 \leq Tx_0$, maka terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $x = Tx$. Selanjutnya $p(x,x) = 0$.

[4]

Teorema Akibat 3.2.4 (Penelitian) Misalkan (X,p) adalah suatu ruang metrik parsial lengkap dan andaikan $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

$p(Tx,Ty)$

$$\leq \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x,y), \\ p(x,Tx), \\ p(y,Ty), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x,Ty) \\ +p(y,Tx) \end{bmatrix} \end{Bmatrix}\right) \qquad (8)$$

Untuk semua $x, y \in X$, dimana $\phi: [0,\infty) \to: [0,\infty)$ adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga $\phi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$. Maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti. Didefinisikan sebuah barisan $\{x_n\}$ di X oleh $x_n = Tx_{n-1}$ untuk $n = 1,2,\ldots$ Andaikan $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ untuk $n_0 = 0,1,2,\ldots$, maka jelas bahwa x_{n_0} adalah suatu titik tetap dari T. Sekarang asumsikan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk semua n.

Langkah 1. Menunjukkan ϕ adalah fungsi tak menurun.

Dari persamaan (8) didapat:

$$p(x_{n+1}, x_n) = p(Tx_n, Tx_{n-1})$$

$$\leq \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, Tx_n), p(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ \frac{1}{2}[p(x_n, Tx_{n-1}) + p(x_{n-1}, Tx_n) \end{Bmatrix}\right)$$

$$\leq \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}), p(x_{n-1}, x_n) \\ ,\frac{1}{2}[p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \end{Bmatrix}\right)$$

$$\leq \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) \\ ,\frac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) \end{Bmatrix}\right)$$

$$= \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x_n, x_{n-1}), \\ p(x_n, x_{n+1}) \end{Bmatrix}\right) \qquad (9)$$

Hal ini berdasarkan sifat metrik parsial, dimana:

$$p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})$$

Sekarang andaikan

$$max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n+1}), n = 1,2,\cdots$$

maka dari (9) didapat:

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi\big(p(x_n, x_{n+1})\big) < p(x_n, x_{n+1})$$

hal ini kontradiksi karena $p(x_n, x_{n+1}) > 0$.

Sehingga, haruslah

$$max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n-1}), \quad n = 1,2,\cdots$$

Maka, dari (9) didapat

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi\big(p(x_n, x_{n-1})\big)$$

dan oleh karena itu, secara induksi matematika didapat:

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^n\big(p(x_1, x_0)\big) \qquad (10)$$

Dengan kata lain, karena

$$max\{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq p(x_n, x_{n+1})$$

maka dari (10) didapat

$$max\{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq \phi^n\big(p(x_1, x_0)\big) \qquad (11)$$

Langkah 2. Menunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy

Oleh karena,

$$\begin{aligned} p^s(x_n, x_{n+1}) &= 2p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 2p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 4\phi^n\big(p(x_1, x_0)\big) \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x_{n+1}) = 0$. Sekarang didapat

$$\begin{aligned} p^s(x_{n+k}, x_n) &\leq p^s(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \cdots + p^s(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq 4\phi^{n+k-1}\big(p(x_1, x_0)\big) + \cdots + 4\phi^n\big(p(x_1, x_0)\big) \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang metrik (X, p^s). Karena (X, p) adalah lengkap maka Lemma 3.1.4 (X, p^s) adalah lengkap dan juga barisan $\{x_n\}$ adalah konvergen pada ruang metrik (X, p^s), dikatakan $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = 0$. Juga dari Lemma 3.1.4, didapat

$$\begin{aligned} p(x, x) &= \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) \\ &= \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \end{aligned} \qquad (10)$$

Lebih jauh karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang metrik (X, p^s), kita mempunyai $\lim_{n,m\to\infty} p^s(x_n, x_m) = 0$ dan dari (11) kita mempunyai $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$, sehingga dari definisi p^s kita mempunyai $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$. Oleh karena itu dari (2.5) kita mempunyai $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$.

Langkah 3. T mempunyai titik tetap

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa $p(x, Tx) = 0$. Asumsikan ini tidak benar, maka dari (8) kita dapat

$$p(x, Tx) \leq p(x, Tx_n) + p(Tx_n, Tx) - p(Tx_n, Tx_n)$$

$$\leq p(x, x_{n+1}) + p(Tx_n, Tx)$$

$$\leq p(x, x_{n+1}) + \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x, x_n), p(x, Tx), \\ p(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[p(x, x_{n+1}) + p(x, Tx) \end{Bmatrix}\right)$$

$$\leq p(x, x_{n+1}) + \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x, x_n), p(x, Tx), p(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x, x_{n+1}) + p(x_n, x) \\ +p(x, Tx) - p(x, x) \end{bmatrix} \end{Bmatrix}\right)$$

$$= p(x, x_{n+1}) + \phi\left(max\begin{Bmatrix} p(x, x_n), p(x, Tx), p(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x, x_{n+1}) + p(x_n, x) \\ +p(x, Tx) \end{bmatrix} \end{Bmatrix}\right)$$

menggunakan kontinuitas dari ϕ dan misalkan $n \to \infty$, didapat
$p(x,Tx) \le \phi\big(p(x,Tx)\big)$
hal ini merupakan kontradiksi. Oleh karena itu $p(x,Tx) = 0$ dan juga $x = Tx$. Sekarang misalkan z adalah titik tetap lain dari T, dengan $x \ne z$ maka dari (8) karena $p(x,x) = 0$, didapat

$$\begin{aligned} p(x,z) &= p(Tx,Tz) \\ &\le \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(x,z), p(x,Tx), p(z,Tz), \\ \frac{1}{2}[p(x,Tz) + p(z,Tx)] \end{Bmatrix} \right) \\ &= \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(x,z), p(x,x), p(z,z), \\ \frac{1}{2}[p(x,z) + p(z,x)] \end{Bmatrix} \right) \\ &= \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(x,z), p(x,x), p(z,z), \\ \frac{1}{2}[p(x,z) + p(z,x)] \end{Bmatrix} \right) \\ &= \phi(max\{p(x,z), p(z,z)\}) \\ &= \phi\big(p(x,z)\big) \end{aligned}$$

dimana hal ini merupakan kontradiksi. Sehingga $x = z$.

Berikut ini diberikan contoh bahwa kondisi pada Teorema 1 (kontraktif lemah) terpenuhi tetapi kondisi kontraktif Nadler tidak.

Contoh 3.1.3
Misalkan $X = [0,\infty)$ dan $p(x,y) = max\{x,y\}$, jelaslah bahwa (X,p) adalah ruang metrik parsial lengkap. Misalkan $T: X \to X, Tx = \frac{x^2}{1+x}$ untuk semua $x \in X$ dan $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty), \phi(t) = \frac{t^2}{1+t}$. Maka untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \ge y$ didapat

$$\begin{aligned} p(Tx,Ty) &= max\left\{\frac{x^2}{1+x}, \frac{y^2}{1+y}\right\} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \\ &= \phi\big(p(x,y)\big) \\ &\le \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \\ \frac{1}{2}[p(x,Ty) + p(y,Tx)] \end{Bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi dari Teorema 1 terpenuhi dan juga T mempunyai titik tetap di X. Tetapi kita tidak bisa menerapkan Teorema Matthew untuk contoh ini, karena tidak terdapat $\alpha \in [0,1)$ sedemikian sehingga $p(Tx,Ty) \le \alpha p(x,y)$.

Selanjutnya dikaji teorema untuk dua pemetaan T, S di ruang metrik parsial (X,p).

Teorema Akibat 3.2.5 (Penelitian) Misalkan (X,p) adalah suatu ruang metrik parsial lengkap, dan misal terdapat dua pemetaan $T, S: X \to X$ yang memenuhi syarat berikut:

$$p(Tx,Sy) \le \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(x,y), p(x,Tx), \\ p(y,Sy), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x,Sy) \\ +p(y,Tx) \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \right) \tag{11}$$

Untuk semua $x, y \in X$, dimana $\phi: [0,\infty) \to: [0,\infty)$ adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga $\phi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$. Maka pemetaan tersebut mempunyai titik tetap yang sama.

Bukti.
Misalkan $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ sehingga $x_2 = Tx_1$ dan $x_1 = Sx_0$, secara induksi dibentuk:

$$\begin{aligned} &x_{2k+2} = Tx_{2k+1}, \\ &x_{2k+1} = Sx_{2k},\ k = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{12}$$

Jika terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $x_{2N} = x_{2N+1}$, maka x_{2N} adalah titik tetap dari S dan mengakibatkan titik tetap juga dari T. Tentu saja, karena $x_{2N} = x_{2N+1} = Sx_{2N}$, maka

$$\begin{aligned} &Sx_{2N} = Sx_{2N+1} = S^2x_{2N} \\ &\Longrightarrow x_{2N} = Sx_{2N} = Sx_{2N+1} = x_{2N+1} \end{aligned} \tag{13}$$

Juga, dari (11) didapat

$$p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) = p(Tx_{2N+1}, Sx_{2N}) \le \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1}), \\ p(Sx_{2N}, x_{2N}), \\ p(x_{2N+1}, x_{2N}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(Tx_{2N+1}, x_{2N}) \\ +p(Sx_{2N}, x_{2N+1}) \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \right) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\le \phi\left(max \begin{Bmatrix} p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1}), p(x_{2N}, x_{2N}), \\ p(x_{2N+1}, x_{2N}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(Tx_{2N+1}, x_{2N}) \\ +p(x_{2N+1}, x_{2N+1}) \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \phi\big(p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1})\big) = \phi\big(p(Tx_{2N+1}, x_{2N})\big) \\ &= \phi\big(p(x_{2N+2}, x_{2N+1})\big) \end{aligned} \tag{15}$$

Sehingga persamaan (15) menjadi:

$$\begin{aligned} p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) &= p(Tx_{2N+1}, Sx_{2N}) \\ &\le \phi\big(p(x_{2N+2}, x_{2N+1})\big) \end{aligned} \tag{16}$$

Sehingga (16) mengakibatkan $(1-\phi)p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) \le 0$. Karena $p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) > 0$, maka $p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) = 0$, yang mengakibatkan $Tx_{2N+1} = x_{2N+2} = x_{2N+1}$. Perhatikan bahwa $x_{2N+1} = x_{2N}$ adalah titik tetap dari S. Sebagai hasilnya, $x_{2N+1} = x_{2N}$ adalah titik tetap bersama dari S dan T. Kesimpulan yang sama terjamin jika $x_{2N+1} = x_{2N+2}$ untuk beberapa bilangan bulat positif N. Oleh karena itu, kita dapat mengasumsikan $x_k \ne x_{k+1}$ untuk semua k.

Jika k ganjil, berdasarkan (11) didapat
$p(x_{k+1}, x_{k+2}) = p(Tx_k, Sx_{k+1})$

$$\leq \phi\left(max \left\{ \begin{array}{c} p(x_{k+1}, x_k), \\ p(x_{k+2}, x_{k+1}), \\ p(x_k, x_{k+1}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x_{k+1}, x_{k+1}) \\ +p(x_{k+2}, x_k) \end{bmatrix} \end{array} \right\} \right) \quad (17)$$

dari sifat metrik parsial bagian (iv), didapat

$$p(x_{k+1}, x_{k+1}) + p(x_{k+2}, x_k) \leq p(x_{k+2}, x_{k+1}) + p(x_{k+1}, x_k) \quad (18)$$

Sehingga (17) menjadi

$$p(x_{k+1}, x_{k+2}) \leq \phi\left(max \left\{ \begin{array}{c} p(x_{k+1}, x_k), \\ p(x_{k+2}, x_{k+1}), \\ p(x_k, x_{k+1}), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x_{k+2}, x_{k+1}) \\ +p(x_{k+1}, x_k) \end{bmatrix} \end{array} \right\} \right) = \phi\left(max \left\{ \begin{array}{c} p(x_{k+1}, x_k), \\ p(x_{k+2}, x_{k+1}) \end{array} \right\} \right) \quad (19)$$

Jika $max\{p(x_{k+1}, x_k), p(x_{k+2}, x_{k+1})\} = p(x_{k+2}, x_{k+1})$, maka karena $p(x_{k+2}, x_{k+1}) > 0$, ketidaksamaan (17) mengakibatkan kontradiksi. Oleh karena itu, $max\{p(x_{k+1}, x_k), p(x_{k+2}, x_{k+1})\} = p(x_{k+1}, x_k)$ dan oleh (17) kita mempunyai

$$p(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq \phi\big(p(x_{k+2}, x_{k+1})\big) \quad (20)$$

Jika k genap, ketidaksamaan (20) dapat diperoleh secara analog.
Kita mendapat bahwa $\{p(x_k, x_{k+1})\}$ tak negatif, barisan bilangan riil tak menaik. Dengan memperhatikan (20), dapat diteliti bahwa

$$p(x_k, x_{k+1}) \leq \phi^k p(x_0, x_1) \quad (21)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) &= 2p(x_{k+1}, x_{k+2}) - p(x_{k+1}, x_{k+1}) - p(x_{k+2}, x_{k+2}) \\ &\leq 2p(x_{k+1}, x_{k+2}) + p(x_{k+1}, x_{k+1}) + p(x_{k+2}, x_{k+2}) \\ &\leq 4\phi^{k+1} p(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (22)$$

Sehingga, dengan memperhatikan (23), kita mempunyai $\lim_{k\to\infty} p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) = 0$. Lebih jauh,

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1}, x_{k+s}) &\leq p^s(x_{k+s-1}, x_{k+s}) + \cdots + p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\leq 4\phi^{k+s} p(x_0, x_1) + \cdots + 4\phi^{k+1} p(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (24)$$

Dengan perhitungan sederhana, didapat bahwa $\{x_k\}$ adalah barisan Cauchy di (X, p^s), yaitu $p^s(x_k, x_m) \to 0$ pada saat $k, m \to \infty$. Karena (X, p) adalah lengkap, oleh Lemma 3.1.4, (X, d) adalah lengkap dan barisan $\{x_k\}$ konvergen di (X, p^s) terhadap, sebut $z \in X$.

Juga, oleh Lemma 3.1.4,

$$p(z, z) = \lim_{k\to\infty} p(x_k, z) = \lim_{k,m\to\infty} p(x_k, x_m) \quad (25)$$

Karena $\{x_k\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d), kita mempunyai $\lim_{k,m\to\infty} p^s(x_k, x_m) = 0$. Kita dapat menyatakan bahwa $\lim_{k,m\to\infty} p(x_k, x_m) = 0$. Tanpa mengurangi sifat keumuman, asumsikan bahwa $n > m$. Sekarang diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p(x_{n+2}, x_n) &\leq p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \end{aligned} \quad (26)$$

Secara analog,

$$\begin{aligned} p(x_{n+3}, x_n) &\leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_n) - p(x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_n) \end{aligned} \quad (27)$$

Dengan mengambil (26), pernyataan (27) menjadi

$$p(x_{n+3}, x_n) \leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \quad (28)$$

Secara induktif, didapat

$$p(x_m, x_n) \leq p(x_m, x_{m-1}) + \cdots + p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \quad (29)$$

Berdasarkan (11), pernyataan (29) menjadi

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq \phi^{m-1} p(x_1, x_0) + \cdots + \phi^{n+1} p(x_1, x_0) + \phi^n p(x_1, x_0) \\ &\leq \phi^n \begin{pmatrix} 1 + \phi + \cdots \\ +\phi^{m-n-1} \end{pmatrix} p(x_1, x_0) \end{aligned} \quad (30)$$

dengan perhitungan sederhana, dapat diteliti bahwa

$$\lim_{k,m\to\infty} p(x_k, x_m) = 0 \quad (31)$$

Oleh karena itu, dari (15), didapat

$$(z, z) = \lim_{k\to\infty} p(x_k, z) = \lim_{k,m\to\infty} p(x_k, x_m) = 0 \quad (32)$$

Dapat dinyatakan bahwa $Tz = z$. Secara kontradiksi, kita asumsikan $Tz \neq z$. Maka $p(z, Tz) > 0$. Misalkan $\{x_{2k(i)}\}$ adalah sub barisan dari $\{x_{2k}\}$ yang merupakan sub barisan dari $\{x_k\}$. Berdasarkan (11), kita mendapat

$$p\big(Sx_{2k(i)}, Tz\big) \leq \phi\left(max \left\{ \begin{array}{c} p\big(x_{2k(i)}, x_{2k(i)+1}\big), \\ p(Tz, z), \\ p\big(x_{2k(i)}, z\big), \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(Tz, x_{2k(i)}\big) \\ +p(z, x_{2k(i)+1}) \end{bmatrix} \end{array} \right\} \right) \quad (33)$$

Misalkan $k \to \infty$ dan mengambil persamaan (32), pernyataan (33) mengakibatkan

$$p\big(Sx_{2k(i)}, Tz\big) = max\left\{0, p(Tz, z), 0, \tfrac{1}{2} p(Tz, z)\right\} \quad (34)$$

Sehingga,

$$p(z, Tz) \leq \phi\big(p(Tz, z)\big) \tag{35}$$

Berdasarkan sifat ϕ, kita dapat $p(Tz, z) = 0$, sehingga $Tz = z$. Secara analog, jika kita memilih barisan $\{x_{2k(i)+1}\}$ dari $\{x_{2k+1}\}$, kita dapat $Sz = z$. Sehingga $Tz = Sz = z$. ■

IV. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas diketahui bahwa: Pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik Parsial (X, p) menjamin eksistensi titik tetap. Selain itu, diketahui juga sifat pemetaan kontraktif lemah yang menjamin eksistensi titik tetap jika syarat berikut terpenuhi:

a. Untuk suatu pemetaan $T: X \to X$ sedemikian sehingga

$$p(Tx, Ty) \leq \phi\left(max\left\{\begin{matrix} p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \\ \frac{1}{2}[p(x,Ty) + p(y,Tx)] \end{matrix}\right\}\right)$$

untuk semua $x, y \in X$, dimana $\phi: [0,\infty) \to : [0,\infty)$ adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga $\phi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$.

b. Untuk dua pemetaan $T, S: X \to X$ sedemikian sehingga

$$p(Tx, Sy) \leq \phi\left(max\left\{\begin{matrix} p(x,y), p(x,Tx), p(y,Sy), \\ \frac{1}{2}[p(x,Sy) + p(y,Tx)] \end{matrix}\right\}\right)$$

Untuk semua $x, y \in X$, dimana $\phi: [0,\infty) \to: [0,\infty)$ adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga $\phi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$

Ucapan Terimakasih

Segala puji dan syukur Penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Mahas Esa karena atas berkat rahmat dan nikmat kesehatan yang diberikan kepada Penulis, sehingga penelitian ini dapat dilakukan. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada rekan-rekan yang banyak memberikan masukan dan saran dalam penulisan penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Chi-Ming Chen, "Some New Fixed Point Theorems for Set-Valued Contraction in Complete Metric Space", Article: Department of Applied Mathematics. National Hsinchu University of Education, Taiwan, 2011. http://fixedpointtheoryandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/1687-1812-2011-72 (diakses, 8 Feb 2012)

[2] H. Aydi, M. Abbas, and C. Vetro, "Partial Hausdorff Metric and Nadler's Fixed Point Theorem on Partial Metric Spaces", Topology and its Applications, Vol. 159, No. 14, pp. 3234-3242, 2012. https://www.researchgate.net/publication/257003674_Partial_Hausdor_metric_and_Nadler's_fixed_point_theorem_on_partial_metric_spaces (diakses, 14 Feb 2016)

[3] H. Aydi, E. Karapinar and S. Rezapour, "A Generalized Meir-Keeler-Type Contraction on Partial Metric Space", Hindawi Publishing Corporation, Volume 2012, 10 pages.

[4] H.P. Masiha, F. Sabetghadam, N. Shahzad, "Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces with an Application", Faculty of Science and Mathematics, University of Nis, Serbia, 2013.

[5] M. Bukatin and S. Matthews, "Partial Metric Space", Publ. Int. Math, 708-718, 2009. doi:10.4169/193009709X460831. https://www.researchgate.net/publication/243118659_Partial_Metric_Spaces (diakses, 20 Apr 2016)

[6] M. Gangopadhyay, M. Saha, and A.P Baisnab, "Some Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces", TWMS Journal. App. Eng. Math. V.3, N.2, pp. 206-213, 2013 http://dergipark.ulakbim.gov.tr/jaem/article/download/5000050028/5000047299 (diakses, 20 Apr 2016) (2.1)

[7] S. Shirali, and H.L Vasudeva, "Metric Space" Springer, 2006.

[8] T. Suzuki, "A Generalized Banach Contraction Principle That Characteries Metric Completeness", Proceedings of The American Mathematical Society. V.136, N.5, pp. 1861-1869, 2008. http://www.ams.org/journals/proc/2008-136-05/S0002-9939-07-09055-7/S0002-9939-07-09055-7.pdf (diakses, 20 Jan 2012)

(2.1)